

✿ Corrigé du Baccalauréat S Antilles-Guyane ✿
23 juin 2009

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

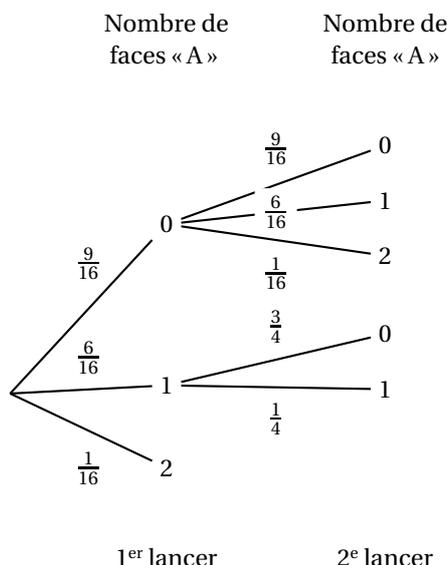
1. On peut dénombrer les cas possibles à l'aide d'un tableau :

	Dé 2	A	B	C	D
Dé 1		A	B	C	D
A		AA	AB	AC	AD
B		BA	BB	BC	BD
C		CA	CB	CC	CD
D		DA	DB	DC	DD

Les deux dés peuvent être supposés équilibrés, il y a donc situation d'équiprobabilité et :

$$p(E_0) = \frac{9}{16}; \quad p(E_1) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}; \quad p(E_2) = \frac{1}{16}.$$

2. a.



b. Il y a trois façons distinctes de gagner pour le joueur :

- il obtient deux faces « A » au premier lancer, ou bien
- il obtient une face « A » au premier lancer, et une face « A » au deuxième, ou bien
- il n'obtient aucune face « A » au premier lancer, et deux faces « A » au second.

À l'aide de l'arbre pondéré ci-dessus, la probabilité de gagner est donc égale à :

$$\frac{1}{16} + \frac{9}{16} \times \frac{1}{16} + \frac{6}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{49}{256}.$$

c. Notons X la variable aléatoire désignant le gain algébrique du joueur.

- $X = 5$ lorsque le joueur gagne, donc $p(X = 5) = \frac{49}{256}$.
- $X = 0$ lorsqu'un seul dé repose sur la face « A », cela peut avoir lieu au premier ou au deuxième lancer, donc d'après l'arbre :

$$p(X = 0) = \frac{9}{16} \times \frac{5}{16} + \frac{6}{16} \times \frac{3}{4} = \frac{126}{256}.$$

- $X = -5$ lorsque le joueur n'obtient aucune face « A », donc $p(X = -5) = \frac{9}{16} \times \frac{9}{16} = \frac{81}{256}$.

On peut résumer la loi de X dans le tableau suivant :

x	-5	0	5	Total
$p(X = x)$	$\frac{81}{256}$	$\frac{126}{256}$	$\frac{49}{256}$	1

L'espérance mathématique de X est alors égale à :

$$E(X) = -5 \times \frac{81}{256} + 0 \times \frac{126}{256} + 5 \times \frac{49}{256} = \frac{-160}{256} < 0,$$

le jeu est donc **défavorable** au joueur.

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. L'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. D'après le cours, f est donc une similitude directe. De plus :
 - $a = 1 + i\sqrt{3}$, donc $|a| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$ et f a pour rapport 2.
 - $a = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $\arg(a) = \frac{\pi}{3}$ (2π) et f a pour angle $\frac{\pi}{3}$.
 - $(1 + i\sqrt{3}) \times 2i + 2\sqrt{3} = 2i - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 2i$, donc $f(A) = A$.

La première affirmation est donc **vraie**.

2. On a : $1991 \equiv 3 \pmod{7}$. De plus $3^2 \equiv 2 \pmod{7}$ et $3^3 \equiv -1 \pmod{7}$ donc $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$.
Comme $2009 = 6 \times 334 + 5$ on en déduit que : $3^{2009} \equiv (3^6)^{334} \times 3^5 \pmod{7}$ c'est-à-dire $3^{2009} \equiv (-1)^{334} \times 3^2 \times 3^3 \pmod{7}$, d'où : $3^{2009} \equiv 1 \times 2 \times (-1) \pmod{7}$, soit : $3^{2009} \equiv -2 \pmod{7}$.
On a finalement $1991^{2009} \equiv -2 \pmod{7}$.

La deuxième affirmation est donc **fausse**.

3. Soit a et b deux entiers relatifs quelconques, n et p deux entiers naturels premiers entre eux.
 - Supposons que $a \equiv b \pmod{p}$, alors $na \equiv nb \pmod{p}$ par compatibilité de la multiplication avec les congruences.
 - Réciproquement, supposons que $na \equiv nb \pmod{p}$. Alors p divise $na - nb$, c'est-à-dire p divise $n(a - b)$. Comme n et p sont premiers entre eux, le théorème de Gauss entraîne que p divise $a - b$, c'est-à-dire que $a \equiv b \pmod{p}$.

L'équivalence est donc démontrée.

La troisième affirmation est donc **vraie**.

4. Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace, alors :

$$(M \in \mathcal{S}) \iff (y = 3 \text{ et } x^2 + y^2 = z) \iff (y = 3 \text{ et } x^2 + 9 = z).$$

Dans le plan d'équation $y = 3$, $z = x^2 + 9$ est l'équation d'une parabole.

La quatrième affirmation est donc **fausse**.

5. Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace à coordonnées entières appartenant à \mathcal{P} et au plan (yOz) .
 - $M = O$ vérifie ces conditions, puisque $x = 0$, $0^2 + 0^2 = 3 \times 0^2$ et $0 \in \mathbb{Z}$.
 - Supposons que M soit distinct de O . Alors $x = 0$ car $M \in (yOz)$. On a donc : $y^2 = 3z^2$. Comme $z \neq 0$ (car sinon y serait nul et M serait confondu avec O), on obtient $\frac{y^2}{z^2} = 3$, ce qui signifierait que $\frac{y}{z}$ est irrationnel (égal à $\pm\sqrt{3}$), ce qui est faux, car $y \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{Z}$. L'hypothèse « M est distinct de O » est donc absurde.

- Le seul point vérifiant les conditions précédentes est donc le point O .
La cinquième affirmation est donc **vraie**.

EXERCICE 2**5 points****Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

- $(M \in \mathcal{E}) \iff (AM = BM)$. \mathcal{E} est donc bien la médiatrice du segment $[AB]$.
La première affirmation est **vraie**.
- $\frac{c-a}{b-a} = 2i$ entraîne que : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(2i) (2\pi)$, d'où : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$.
Le triangle ABC est donc rectangle en A , ce qui entraîne que A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.
La deuxième affirmation est **vraie**.
- Si $z = 2e^{i\frac{\pi}{7}}$, alors $z^{2009} = 2^{2009} e^{i\frac{2009\pi}{7}} = 2^{2009} e^{287i\pi}$. Par conséquent : $\arg(z^{2009}) = 287\pi (2\pi)$, et comme 287 est impair, cela entraîne que z^{2009} est un réel strictement négatif.
La troisième affirmation est donc **fausse**.
- D'après le théorème de réduction : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$. Donc :

$$(M \in \mathcal{F}) \iff (\|3\overrightarrow{MG}\| = 6) \iff (MG = 2).$$

\mathcal{F} est donc la sphère de centre G et de rayon 2.

La quatrième affirmation est **vraie**.

- La sphère \mathcal{S} a pour rayon $\sqrt{5}$ et pour centre $O(0; 0; 0)$.

La distance du point O au plan \mathcal{P} est égale à $\frac{|0+0-5|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

$\sqrt{5} < \frac{5\sqrt{2}}{2}$, donc la sphère et le plan ne sont pas sécants, et leur intersection est vide.

La cinquième affirmation est donc **fausse**.

EXERCICE 3**7 points****Commun à tous les candidats****PARTIE A.**

- f est solution de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{2}y + 10$, donc d'après un théorème du cours, il existe une constante k telle que, pour tout $t \geq 0$:

$$f(t) = ke^{-\frac{1}{2}t} - \frac{10}{-\frac{1}{2}} = ke^{-\frac{1}{2}t} + 20.$$

La condition $f(0) = 220$ entraîne alors que $k + 20 = 220$, c'est-à-dire $k = 200$.
Finalement :

$$f(t) = 200e^{-\frac{1}{2}t} + 20.$$

- f est dérivable sur \mathbb{R}^+ en tant que combinaison simple de fonctions qui le sont, et, pour tout $t \geq 0$:

$$f'(t) = -100e^{-\frac{1}{2}t} < 0;$$

la fonction f est donc strictement décroissante sur \mathbb{R}^+ .

- b. $\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{t}{2} = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc par composition $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t}{2}} = 0$. On en déduit par opérations que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20$; ce qui signifie que la droite \mathcal{D} d'équation $y = 20$ est asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.
- c. Voir figure.

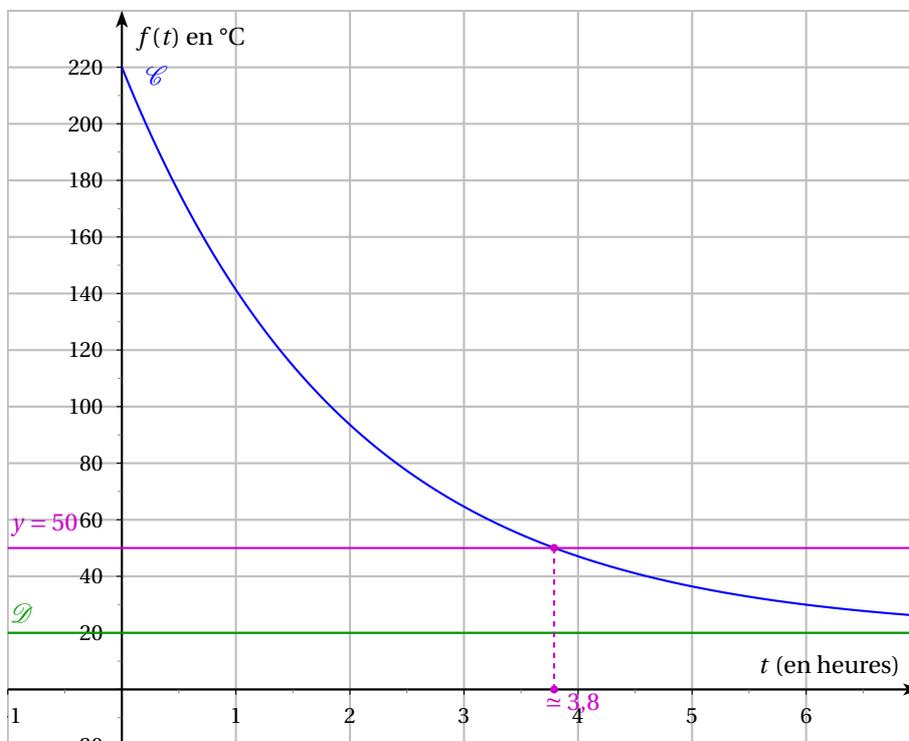


FIGURE 1 – exercice 3, question 2c

3. a. Graphiquement, $f(t) = 50$ pour $t = 3,8$, soit 3 heures et 48 minutes environ.
- b. Résolvons :

$$\begin{aligned}
 f(t) = 50 &\iff 200e^{-\frac{t}{2}} + 20 = 50 \\
 &\iff 200e^{-\frac{t}{2}} = 30 \\
 &\iff e^{-\frac{t}{2}} = \frac{3}{20} \\
 &\iff -\frac{t}{2} = \ln\left(\frac{3}{20}\right) \\
 &\iff t = -2\ln\left(\frac{3}{20}\right) \approx 3,79 \text{ à } 0,01 \text{ près}
 \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat précédent.

PARTIE B.

1. a. À l'aide de la calculatrice, au dixième près : $d_0 \approx 78,7$, $d_1 \approx 47,7$, $d_2 \approx 28,9$.
- b. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, il est clair que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1)$ donc que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$.

2. On déterminer à partir de quel entier naturel n on a $d_n \leq 5$.

$$\begin{aligned} d_n \leq 5 &\iff 200e^{-\frac{n}{2}} - 200e^{-\frac{n+1}{2}} \leq 5 \\ &\iff 200e^{-\frac{n}{2}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \leq 5 \\ &\iff 40 \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \leq e^{\frac{n}{2}} \\ &\iff \ln \left[40 \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \leq \frac{n}{2} \\ &\iff 2 \ln \left[40 \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \leq n \end{aligned}$$

et comme $2 \ln \left[40 \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \approx 5,5$ (au dixième près), la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle l'abaissement de température est inférieur à 5°C est donc $n = 6$.

Remarque : on pouvait aussi démontrer que la suite (d_n) est décroissante, puis calculer d_5 et d_6 et conclure.

EXERCICE 4

4 points

Commun à tous les candidats

1.
 - a. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^+ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et pour tout réel $x \geq 0$: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{1+x} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , et pour tout $x \geq 0$ on a alors $f(x) \geq f(0)$, c'est-à-dire $x - \ln(1+x) \geq 0$, d'où : $\ln(1+x) \leq x$.
 - b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}^+$, donc d'après la question précédente : $\ln(u_n) \leq n \times \frac{1}{n}$, c'est-à-dire $\ln(u_n) \leq 1$.
 - c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) \leq 1$, donc $u_n \leq e$ et la suite (u_n) est majorée par e , elle ne peut donc pas diverger vers $+\infty$.
2.
 - a. $v_n = \ln(u_n) = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, en posant $x = \frac{1}{n}$ on a donc : $v_n = \frac{\ln(1+x)}{x}$.
 - b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ d'après une limite du cours. Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $x \rightarrow 0$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.
 - c. $v_n = \ln(u_n)$, donc $u_n = e^{v_n}$, et comme (v_n) converge vers 1, on en déduit que (u_n) converge vers e .